

Martina Pistolesi e Sandro Jurinovich

I.T. "C. Cattaneo", Via Catena 3, San Miniato, Pisa

✉ sandro.jurinovich@posta.istruzione.it

Cinetica di reazione e modello SIR

Un percorso trasversale di educazione civica tra chimica, matematica ed epidemiologia

RIASSUNTO

La pandemia di COVID-19 ha profondamente segnato la nostra vita e quella degli studenti, costretti alla chiusura delle scuole e alla didattica "a distanza". Per la sua attualità, questo argomento è uno spunto di riflessione per la costruzione di un percorso didattico trasversale di educazione civica che aiuti gli studenti a comprendere ed interpretare con spirito critico l'andamento dell'epidemia ed il senso e l'importanza delle misure di prevenzione del contagio. A partire dallo studio cinetico di reazioni chimiche consecutive e dalla risoluzione matematica delle relative equazioni, si introduce un semplice modello epidemiologico per la descrizione dell'epidemia di COVID-19, sfruttando le analogie e differenze dei due modelli matematici e rafforzando diverse competenze di base di chimica e matematica, in un'ottica multidisciplinare.

ABSTRACT

The COVID-19 pandemic has profoundly changed our everyday lives, and most students experienced school closures and on-line learning. The current events constitute the driving force for designing a cross-disciplinary didactic sequence to help the students to develop a critical thinking about the pandemic and its evolution and to understand the relevance of sanitary prevention measures. Starting from studying the kinetics of consecutive chemical reactions and the mathematical resolution of the related equations, we introduce a simple epidemiological model for the description of the COVID-19 disease. The parallelism between chemical and epidemiological kinetic models has been used to develop skills in both chemistry and maths from a multidisciplinary point of view. The topics proposed here enter in the civic education curriculum, as suggested by the recent Italian education regulations.

Introduzione

La Legge n. 92 del 20 agosto 2019 ha introdotto nel curriculum del primo e del secondo ciclo l'insegnamento della disciplina "educazione civica" come disciplina trasversale senza prevedere un aumento del monte ore totale del curriculum. Per l'insegnamento dell'educazione civica occorre quindi "ritagliare" uno spazio di 33 ore annuali all'interno dell'orario di una o più discipline curricolari. La spiccata trasversalità e multidisciplinarietà dell'educazione civica richiede l'applicazione di metodi e strategie didattiche innovative. È inoltre necessario progettare percorsi didattici in grado di costruire competenze trasversali e di rinforzare le conoscenze disciplinari delle materie coinvolte. Tali percorsi devono coinvolgere in modo attivo gli studenti nello studio di una nuova disciplina che, da parte loro, potrebbe essere solo identificata come "una materia in più da studiare".

Una strategia efficace per catalizzare l'attenzione e l'interesse degli studenti è quella di realizzare un percorso didattico che metta in gioco le competenze disciplinari acquisite in certe materie e l'interesse dei ragazzi verso una tematica vicina alla loro esperienza nel quotidiano. All'interno di questo contesto, presentiamo un percorso didattico progettato e sperimentato in una classe quinta dell'Istituto Tecnico "C. Cattaneo" di San Miniato ad indirizzo Chimica e Materiali durante il mese di marzo, in modalità "a distanza". Il percorso intreccia la chimica e la matematica, proponendo un parallelismo tra lo schema cinetico che descrive un sistema di reazioni consecutive ed il modello epidemiologico "SIR" in grado di descrivere, seppur con alcune limitazioni, l'evoluzione dell'epidemia COVID-19. La riflessione scientifica sulla situazione pandemica contribuisce allo sviluppo di un pensiero critico negli studenti e

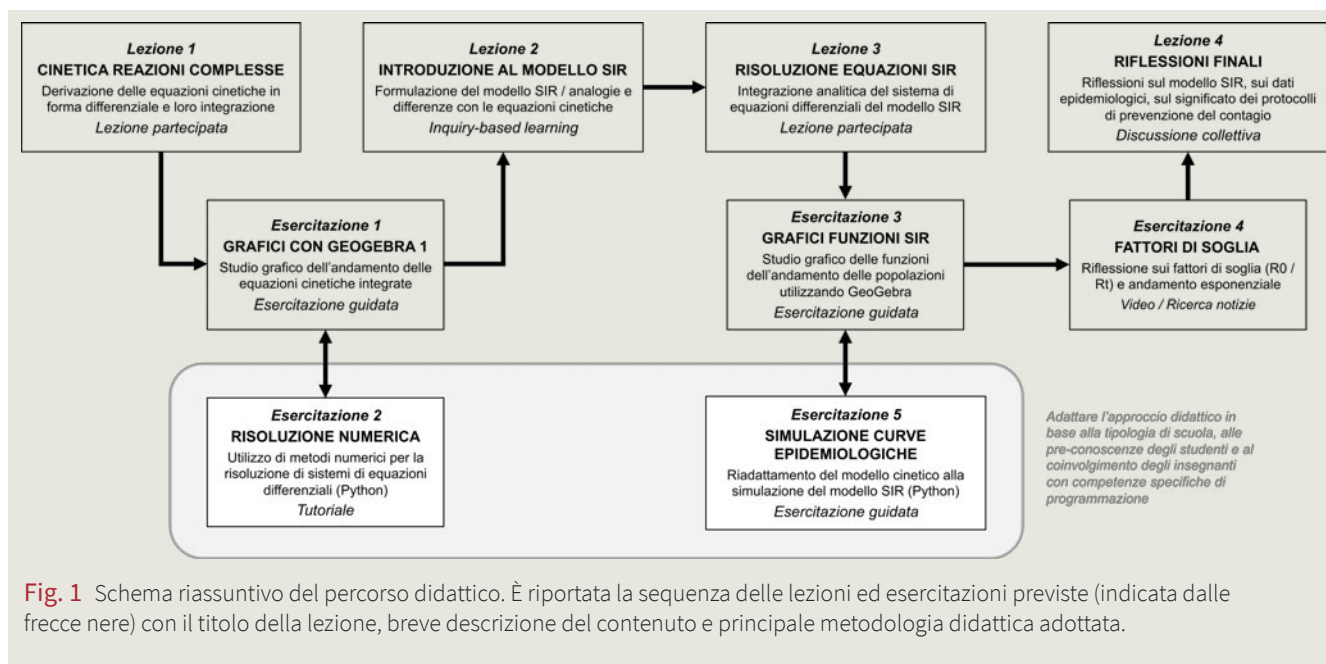


Fig. 1 Schema riassuntivo del percorso didattico. È riportata la sequenza delle lezioni ed esercitazioni previste (indicata dalle frecce nere) con il titolo della lezione, breve descrizione del contenuto e principale metodologia didattica adottata.

di una consapevolezza rispetto ad argomenti che risultano di spiccata attualità.

I materiali didattici che accompagnano questo articolo (appendici di approfondimento, guide alle esercitazioni, schede di lavoro per gli studenti, ecc.) sono raccolti in un *Padlet* [1] dedicato.¹ I docenti interessati a sperimentare il percorso in classe hanno così a disposizione, in un unico contenitore digitale, tutte le risorse necessarie.

Il percorso didattico

Il percorso didattico è costituito da una sequenza di lezioni ed esercitazioni in cui l'insegnante presenta nuovi contenuti attraverso modalità di insegnamento attive. Principalmente si utilizzano le metodologie della lezione partecipata e della discussione collettiva in una chiave *inquiry-based learning* [2], facendo spesso ricorso allo strumento della domanda, nella forma di domanda-stimolo o domanda-provocatoria. La domanda stimola l'interesse e la curiosità degli studenti ed è utile per collegare i diversi temi. Nelle esercitazioni, invece, è richiesto un ruolo più attivo degli studenti che sono chiamati a costruire grafici, analizzare dati, fare simulazioni, ecc., anche utilizzando strumenti digitali.

Lo schema del percorso didattico è riassunto nella figura 1 e descritto in dettaglio nei paragrafi successivi. Il percorso può essere svolto totalmente a distanza o in modalità mista (*blended*),² per una durata complessiva stimata in 13-15 ore totali. Il percorso può essere riadattato anche per le classi terminali di un liceo scientifico tradizionale o scienze applicate, avendo cura di consolidare opportunamente le pre-conoscenze richieste.

Obiettivi didattici, prerequisiti e valutazione

Il percorso permette di conseguire sia obiettivi di competenza trasversali di cittadinanza che specifici obiettivi disciplinari, anche attraverso problemi reali che richiedono di essere affrontati in chiave interdisciplinare. Il percorso promuove anche lo sviluppo della coscienza civile e sociale degli studenti favorendo un atteggiamento di convivenza rispettoso delle regole. Grazie all'impostazione didattica, gli studenti migliorano le loro capacità di prendere parte ad una discussione, affrontare problemi, indicare soluzioni. Alcune esercitazioni, che prevedono l'utilizzo di un programma *Python*, permettono di acquisire conoscenze specifiche di programmazione. Gli obiettivi didattici ed i prerequisiti sono descritti in

¹ Il *Padlet* è un nuovo strumento digitale che permette di creare "bacheche virtuali" condivisibili per raccogliere ed organizzare materiale multimediale di diverso tipo.

² In quest'ultimo caso è consigliabile svolgere le lezioni 1-4 in presenza e le esercitazioni 1-5 in modalità a distanza, riservando alle lezioni una maggiore possibilità di interazione diretta e di partecipazione attiva e sfruttando il fatto che, da casa, ciascuno studente può usare i propri dispositivi per poter effettuare le esercitazioni.

dettaglio nell'appendice 4, disponibile nelle risorse on-line [1].

Gli obiettivi di apprendimento possono essere valutati *in itinere*, attraverso le esercitazioni e la partecipazione alle lezioni. Viene proposta una verifica sommativa finale strutturata (test a risposta multipla) con lo scopo di valutare sia le conoscenze acquisite (disciplinari e trasversali) che le competenze, attraverso la discussione di semplici situazioni problematiche o casi di studio. Il test a risposta multipla è disponibile in formato PDF nelle risorse on-line [1] ed importabile sulla piattaforma *Socrative* con codice test SOC-57550581.

Descrizione dettagliata delle unità di apprendimento

In questa sezione si riporta una descrizione dettagliata delle attività da proporre in ciascuna lezione, commentando i punti salienti e mettendo in evidenza le domande, gli spunti di riflessione e i passaggi logici che collegano ciascun nucleo al successivo, secondo l'ordine indicato nello schema in figura 1. La descrizione didattica delle esercitazioni e le schede di lavoro da utilizzare con gli studenti sono disponibili nelle risorse on-line [1].

Lezione 1 - Cinetica di reazioni elementari consecutive

Un semplice sistema di reazioni consecutive può essere descritto con lo schema:



in cui una sostanza *A* si converte in un intermedio *B* (isolabile) che, a sua volta, può reagire dando il prodotto finale *C* della reazione. Le due costanti k_1 e k_2 caratterizzano la velocità delle due reazioni. Supponendo che entrambe le reazioni siano del primo ordine rispetto ai reagenti, possiamo scrivere le seguenti equazioni cinetiche in forma differenziale per ciascuno dei componenti, come illustrato in Tabella 1.

Se vogliamo conoscere l'evoluzione della composizione chimica del sistema che sta reagendo ad un certo istante di tempo, dobbiamo integrare le equazioni (2-4)[3]. L'integrazione della prima equazione (2) nell'intervallo temporale tra $t = 0$ e t , al quale corrispondono le concentrazioni iniziali $[A]_0$ e la concentrazione al tempo t , $[A]$, è immediata per gli studenti che hanno già imparato ad integrare le equazioni cinetiche del primo ordine:

Equazione (2)	Equazione (3)	Equazione (4)
Il componente <i>A</i> diminuisce nel tempo perché si trasforma in <i>B</i> con una velocità direttamente proporzionale alla sua concentrazione.	Il componente <i>B</i> si forma da <i>A</i> con la stessa velocità con cui <i>A</i> scompare, ma contemporaneamente reagisce per formare il componente <i>C</i> con una velocità che è proporzionale alla concentrazione di <i>B</i> .	Il componente <i>C</i> si forma unicamente da <i>B</i> con una velocità che è proporzionale alla concentrazione di <i>B</i> .
$-\frac{d[A]}{dt} = k_1[A]$	$\frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B]$	$\frac{d[C]}{dt} = k_2[B]$

Tab. 1 Equazioni differenziali che descrivono la variazione dei componenti A, B, C e nel tempo per il sistema di reazioni consecutive elementari.

$$[A] = [A]_0 \cdot e^{-k_1 t} \quad (5)$$

La soluzione (5) può essere sostituita nell'equazione (3), ottenendo:

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1[A]_0 \cdot e^{-k_1 t} - k_2[B] \quad (6)$$

Si fa notare agli studenti che l'equazione non dipende più esplicitamente da $[A]$ e possiamo riscriverla nella forma:

$$\frac{d[B]}{dt} + k_2[B] = k_1[A]_0 \cdot e^{-k_1 t} \quad (7)$$

A questo punto, è fondamentale far riconoscere agli studenti che l'equazione differenziale (7) ha la forma di un'equazione lineare completa che gli studenti hanno imparato a risolvere nel corso di matematica. Per aiutarli in questo processo di riconoscimento è utile sfruttare un parallelismo visivo tra l'equazione differenziale scritta in "forma chimica", ovvero utilizzando simboli e costanti tipiche del linguaggio della cinetica e una "forma matematica", tipica del linguaggio più astratto e simbolico della disciplina, anche mediante l'utilizzo di colori per evidenziare le corrispondenze:

$$\frac{d[B]}{dt} + k_2[B] = k_1[A]_0 \cdot e^{-k_1 t} \quad (8)$$

$$y'(t) + f(t)y = g(t)$$

Dato che nel nostro caso la variabile indipendente è data dal tempo, poniamo:

$$\frac{d[B]}{dt} = y'(t) \quad (9)$$

$$k_2 = f(t)$$

$$k_1[A]_0 \cdot e^{-k_1 t} = g(t)$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale (8), che gli studenti hanno visto nel corso di matematica e che è riportata nei libri di testo, è:

$$y = e^{-\int f(t)dt} \cdot \left(\int g(t) \cdot e^{\int f(t)dt} dt + c \right) \quad (10)$$

dove c è una costante. Sostituendo nella soluzione generale (10) le corrispondenti funzioni e costanti esplicitate nelle equazioni (9) si ottiene la funzione (11).

$$[B] = \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \cdot [A]_0 \quad (11)$$

Tutti i passaggi matematici per l'integrazione della (7) utilizzando la soluzione generale (10) sono riportati nell'appendice 1 e possono essere svolti in classe insieme agli studenti. Sostituendo il risultato ottenuto per $[B]$ nell'equazione (4) si ottiene:

$$\frac{d[C]}{dt} = \frac{k_2 k_1}{k_2 - k_1} \cdot (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) \cdot [A]_0 \quad (12)$$

che può essere facilmente integrata separando le variabili:

$$\int_0^{[C]} d[C] = \frac{k_2 k_1}{k_2 - k_1} \cdot [A]_0 \int_0^t (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) dt \quad (13)$$

Applicando le regole di integrazione per le funzioni esponenziali e le proprietà di linearità degli integrali si ottiene infine:

$$[C] = \left(1 + \frac{k_1 e^{-k_2 t} - k_2 e^{-k_1 t}}{k_2 - k_1} \right) \cdot [A]_0 \quad (14)$$

Nell'esercitazione 1, gli studenti sono chiamati a studiare graficamente con *GeoGebra* [4] l'andamento della concentrazione dei tre componenti nel tempo, osservando i risultati ottenuti in due condizioni estreme: a) $k_1 \ll k_2$, in cui la velocità della reazione che converte B in C è molto maggiore rispetto alla reazione che converte A in B ; b) $k_1 \gg k_2$, in cui la concentrazione di A diminuisce rapidamente in quanto si ha un'immediata formazione del composto intermedio B , come illustrato nei grafici in figura

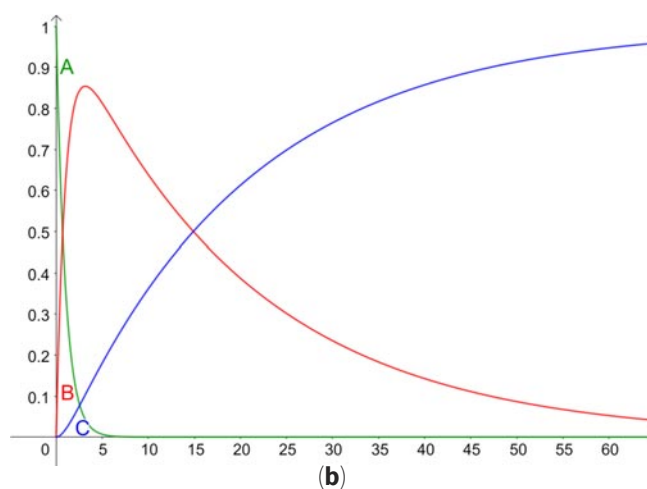
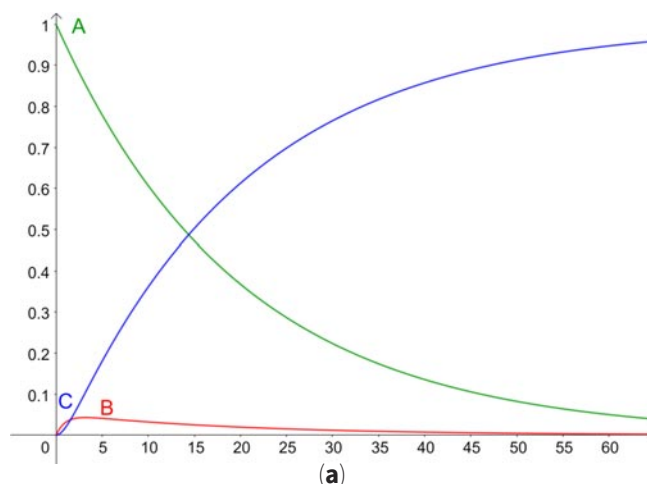


Fig. 2 Grafici realizzati con GeoGebra delle funzioni che descrivono la concentrazione dei tre componenti nel tempo. Il valore della concentrazione iniziale di A è fissato a 1, i valori delle costanti cinetiche sono: caso a) $k_1 = 0,05$, $k_2 = 1$; caso b) $k_1 = 1,00$, $k_2 = 0,05$

2. Le curve cinetiche possono anche essere ottenute utilizzando metodi di integrazione numerica attraverso un programma *Python*, uno dei linguaggi di programmazione più usati al mondo [5] che presenta anche una rapida curva di apprendimento [6] (vedi esercitazione 2).

Lezione 2 - Introduzione al modello SIR

Dopo la discussione sull'andamento delle funzioni che descrivono il sistema di reazioni consecutive elementari, si pone agli studenti la seguente domanda: *osservate l'andamento della curva relativa al componente B nel caso in cui $k_1 \gg k_2$, a che cosa assomiglia la forma della curva? Avete già visto andamenti simili? Se sì, dove?* Gran parte degli studenti riconosce nella forma della funzione $[B](t)$ un andamento simile a quello della curva epidemiologica che descrive il numero dei positivi al COVID-19, co-

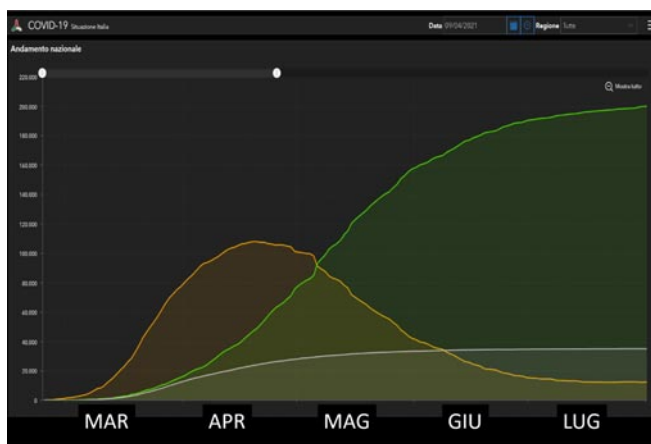


Fig. 3 Screenshot dei grafici dell'andamento dell'epidemia di COVID-19 relativi alla prima ondata (periodo febbraio-luglio 2020) estratti dalla banca dati della protezione civile. La curva arancione rappresenta il numero dei soggetti infetti nel tempo [7]

stantemente al centro delle notizie sui media negli ultimi mesi (vedi Figura 3).

Ci chiediamo quindi se ci sia un qualche legame tra i due andamenti, e la domanda precedente permette di introdurre la lezione 2, incentrata sul modello matematico per descrivere un'epidemia, mantenendo elevato il livello di curiosità. Il parallelismo tra cinetica di reazione (un campo affine al percorso di studi, ripreso e approfondito all'inizio di questo percorso) e la curva epidemiologica, permette di introdurre un argomento nuovo, al di fuori del "normale" programma disciplinare, ma che, sfruttando conoscenze di chimica e matematica vicine agli studenti, viene percepito in modo più familiare e meno difficile rispetto ad introdurre direttamente questa lezione decontestualizzata dal percorso.

Il modello SIR

Un'introduzione ai modelli matematici per descrivere le epidemie può essere fatta attraverso il primo modello epidemiologico proposto nel 1927 dagli studiosi Kermack e McKendrick, meglio conosciuto con l'acronimo SIR [8]. Il modello *SIR* suddivide un'intera popolazione di N individui in tre classi distinte:

- Suscettibili (S), sono gli individui inizialmente sani che possono contrarre la malattia;
- Infetti/infettivi (I), sono gli individui malati ed in grado di trasmettere la malattia per contagio diretto;
- Rimossi (o guariti) (R), sono gli individui che,

³ Il modello *SIR* introduce delle semplificazioni, ad esempio assume che gli individui abbiano comportamenti identici, trascura le differenze di età, di sesso, di collocazione geografica ecc. Inoltre, richiede che la popolazione non sia soggetta a flussi in ingresso o in uscita, come ad esempio nascite, decessi, immigrazioni o emigrazioni, che non vi siano tempi di incubazione della malattia e che tutti gli individui infetti siano anche infettivi ed ugualmente contagiosi.



Fig. 4 Diagramma di trasferimento per il modello SIR

dopo aver contratto la malattia, sono guariti e non più in condizione di ammalarsi nuovamente (sono definiti rimossi perché non fanno più parte dell'insieme delle persone in grado di ammalarsi e quindi divenire infette).

Nel modello *SIR* si assume che la somma degli individui che appartengono alle varie classi (o compartimenti) sia costante nel tempo, ovvero che:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) = N_0 \quad (15)$$

Il modello *SIR* è in grado di descrivere qualitativamente l'andamento di patologie la cui diffusione è basata sul contatto umano (ad esempio, influenza, morbillo, ecc.) [8], e può essere applicato, in prima approssimazione,³ anche per la modellizzazione dell'andamento dell'epidemia di COVID-19 [9]. Il modello matematico per la descrizione dell'epidemia di COVID-19 è in realtà molto più complesso e richiede l'introduzione di più compartimenti e di considerazioni che tengono conto delle peculiarità della malattia e del modo in cui il sistema sanitario è in grado di rispondere, che vanno oltre gli scopi didattici di questo percorso [10, 11].

Nel modello *SIR*, all'esordio dell'epidemia ($t = 0$) supponiamo che vi sia almeno un individuo infetto $I(0) = 1$ e che tutto il resto della popolazione sia sana ($S(0) \approx N$). Con il passare del tempo vi sarà un'evoluzione del numero di individui all'interno di ciascuna classe. Il passaggio da una classe ad un'altra è descritto dallo schema di trasferimento illustrato in figura 4.

Osservando lo schema di trasferimento, si chiede agli studenti: *che cosa vi ricorda questo schema?* Tutti gli studenti concordano che lo schema è simile a quello delle reazioni consecutive. In effetti, a prima vista, stiamo trasformando il "reagente" (suscettibili) in un "composto intermedio" (infetti) che a sua volta può evolvere nel "prodotto finale" (guariti).

Una volta riconosciuta la similitudine con lo schema cinetico visto precedentemente, chiediamo agli studenti di scrivere un sistema di equazioni differenziali in grado di descrivere il modello *SIR*, come abbiamo fatto in precedenza con le equazioni cinetiche e sottolineando che, in questo caso, le costanti cinetiche che regolano la “velocità di reazione” vanno intese come costanti di velocità relative al “trasferimento” degli individui da un comparto all’altro. La risposta più diffusa, in analogia con quanto visto precedentemente è:

$$\begin{cases} -\frac{dS}{dt} = k_1 S \\ \frac{dI}{dt} = k_1 S - k_2 I \\ \frac{dR}{dt} = k_2 I \end{cases} \quad (16)$$

Chiediamo, quindi, agli studenti di tradurre in parole la prima equazione differenziale. Una possibile risposta è: *la velocità con cui i suscettibili diminuiscono perché si infettano è direttamente proporzionale ad una costante k_1 e al numero di suscettibili.*

Per approfondire il problema, poniamo una domanda provocatoria: *secondo voi, non cambia nulla nella velocità di diffusione della malattia se ci sono 1, 10 o 1000 individui infetti in grado di contagiare i suscettibili?*

Gli studenti concordano che anche questo fattore è importante: è evidente che maggiore è il numero degli infetti e più velocemente il contagio si diffonde. Dobbiamo quindi correggere l’ipotesi iniziale inserendo una dipendenza di proporzionalità diretta con il numero di infetti (moltiplicando *S* per il numero di infetti sia nella prima che nella seconda equazione), un po’ come se si trattasse di una sorta di reazione “del secondo ordine” anche se in questo caso sarebbe uno dei prodotti ad influenzare la velocità di reazione. Si ottiene quindi il sistema di equazioni corretto:

$$\begin{cases} -\frac{dS}{dt} = k_1 SI \\ \frac{dI}{dt} = k_1 SI - k_2 I \\ \frac{dR}{dt} = k_2 I \end{cases} \quad (17)$$

Infine, si proietta alla LIM il sistema di equazioni che identifica il modello *SIR* in epidemiologia, dove si può riconoscere che le costanti cinetiche che siamo abituati a chiamare k_1 e k_2 in chimica diventano β e γ rispettivamente, ed assumono un preciso signifi-

cato fisico [12], come illustrato in dettaglio nell’appendice 3 ed approfondito nell’esercitazione 5.

$$\begin{cases} -\frac{dS}{dt} = \beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (18)$$

Lezione 3 – Risoluzione equazioni del modello *SIR*

A partire dal sistema di equazioni differenziali (18), sommando le tre equazioni si ottiene l’espressione (19) che la variazione totale di suscettibili, infetti e rimossi è nulla, ovvero che il loro numero (totale) rimane costante nel tempo.

$$\frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = 0 \quad (19)$$

Questo risultato è coerente con le ipotesi iniziali fatte sulla popolazione che abbiamo ipotizzato essere chiusa ed omogenea, come descritto dall’equazione (15). Nella Tabella 2 riportiamo una serie di domande per stimolare la discussione e far ragionare gli studenti sul significato delle equazioni differenziali del modello *SIR*. Con riferimento a tre diverse condizioni iniziali per quanto riguarda il numero di infetti, si cerca di ipotizzare quale sarà l’andamento della funzione *I(t)*.

Come descritto nella Tabella 2, il caso 3 non è al momento risolvibile e quindi non possiamo conoscere come variano gli infetti nel decorso dell’epidemia. Possiamo però, studiando la derivata, determinare in quali condizioni la funzione *I(t)* è crescente (fase espansione dell’epidemia) o decrescente (fase di remissione), ponendo:

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \geq 0 \quad (20)$$

Da essa si ottiene che all’inizio dell’epidemia ($t = 0$), la funzione *I(t)* che descrive il numero degli infetti sarà crescente (derivata positiva) se il rapporto $\beta N / \gamma \geq 1$. Tale rapporto rappresenta il noto fattore di soglia, o indice R_0 (*erre-con-zero*) che più volte ha avuto risonanza mediatica nell’ultimo anno.

Dopo la lezione 3 seguono tre esercitazioni, descritte nelle risorse on-line [1], che permettono di approfondire il modello *SIR* attraverso lo studio grafico delle funzioni che descrivono l’andamento dell’epi-

Caso	Domanda stimolo	Soluzione	Spiegazione fisica
1	Cosa succede se il numero di infetti al tempo $t=0$ è esattamente zero? $I(0) = 0$	$\frac{dI}{dt} = 0$ Se la derivata nel punto $t = 0$ è nulla, significa che $I(t)$ deve essere costante. Dalla condizione iniziale ipotizzata $I(0) = 0$ ne consegue che, per qualunque tempo $t > 0$, $I(t) = 0$	Se non vi sono infetti, l'epidemia non si può diffondere e quindi, indipendentemente dal valore di t , il numero di infetti sarà sempre nullo.
2	Cosa succede se inizialmente il numero di infetti coincide con l'intera popolazione? $I(0) = N$	Se $I(0) = N$, necessariamente gli altri due compartimenti devono essere vuoti, ovvero $S(0) = R(0) = 0$, e quindi: $\frac{dI}{dt} = -\gamma I$ che risulta facilmente integrabile ottenendo: $I = Ne^{-\gamma t}$	Se all'inizio dell'epidemia non vi sono persone sane (sono tutte infette), il numero degli infetti decade in modo esponenziale con la costante di tempo γ .
3	Cosa succede se il numero di infetti è compreso tra 0 ed N ? $0 < I(0) < N$	Si ottiene, separando le variabili: $\frac{dI}{I} = (\beta S - \gamma) dt$ $\int_{I_0}^{I_t} \frac{dI}{I} = \int_0^t (\beta S(t) - \gamma) dt$ $I(t) = I_0 e^{\int_0^t (\beta S(t) - \gamma) dt}$	Non possiamo risolvere in maniera esplicita l'integrale perché al momento non conosciamo la forma della funzione $S(t)$!

Tab. 2. Domande stimolo e relative soluzioni per iniziare la discussione in classe sulla risoluzione delle equazioni del modello SIR e loro interpretazione fisica.

demia, anche in funzione del fattore di soglia R_0 (esercitazioni 3-4) ed una simulazione delle curve epidemiologiche nel dominio del tempo attraverso metodi di integrazione numerica utilizzando *Python* (esercitazione 5).

Lezione 4 – Riflessioni finali

Riflessione sul significato matematico di R_0

Il fattore di soglia R_0 è stato introdotto nella lezione 3 e la sua importanza nel determinare I_{max} è stato indagato nell'esercitazione 3. Adesso che gli studenti hanno una comprensione più profonda del significato del fattore di soglia, è interessante proporre la visione di un video su YouTube (<https://youtu.be/1jmAGxE6Bh4>)

in cui il prof. Silvio Mercadante, docente di matematica al Politecnico di Torino, citando alcune affermazioni scorrette fatte da qualche giornalista sulla “crescita esponenziale”, spiega in modo chiaro la relazione tra R_0 e la diffusione esponenziale dell'epidemia e la conseguente necessità matematica di “restare distanziati”.

Riflessione sulle norme di comportamento per il contenimento del contagio

Le simulazioni dell'esercitazione 5 sottolineano l'importanza dell'introduzione delle norme di prevenzione del contagio da COVID-19. Possiamo proiettare sulla LIM i pannelli grafici riportati in figura 5 per sti-



(a)



(b)



(c)

Fig. 5 Pannello grafico con riassunte le regole da seguire per contenere il contagio da Coronavirus (a); cartello che indica l'obbligo di indossare la mascherina (b); regioni colorate a “zone” come da DPCM del 2 marzo 2021 (c)

Comportamento raccomandato	$\beta = \rho c$		$\gamma = \frac{1}{D}$	Effetto complessivo sulla curva $I(t)$
	ρ Probabilità di contrarre infezione da un contatto	c Tasso di contatti "pro-capite"	D Durata del tempo in cui un infetto rimane tale	
Lavarsi spesso le mani	👎	×	×	👎
Non toccarsi occhi, bocca e naso	👎	×	×	👎
Evitare le strette di mano e gli abbracci	👎	×	×	👎
Restare a casa se si hanno sintomi	×	×	×	👎
Usare fazzoletti; piegare il gomito	👎	×	×	👎
Evitare luoghi affollati	×	👎	×	👎
Evitare contatti ravvicinati	👎	×	×	👎
Utilizzare sempre la mascherina	👎	×	×	👎
Restrizioni a spostamenti	×	👎	×	👎
Chiusura dei ristoranti	×	👎	×	👎
[...]				

Tab. 3 Schema riassuntivo dell'effetto delle norme di prevenzione del contagio da Coronavirus sui parametri del modello SIR ed effetto globale sulla curva epidemiologica

molare la discussione e chiedere agli studenti: *sa-preste mettere in relazione il comportamento raccomandato con l'effetto sui valori dei parametri β e γ che entrano nel modello SIR?*

Si può proporre un *brainstorming* in classe prendendo in esame ciascun comportamento e cercando di individuare come questi comportamenti modificano i valori di ciascun parametro specifico. È utile preparare lo schema (vuoto) illustrato in Tabella 3 da proiettare sulla LIM insieme al pannello grafico.

Non è subito immediato identificare il parametro su cui il comportamento ha effetto ed in classe possono sorgere interessanti momenti di confronto e discussione. È possibile anche ampliare la tabella aggiungendo comportamenti sbagliati, proposti dagli studenti, che potrebbero avere effetti diversi.

Un'ultima interessante osservazione che può essere fatta riguarda il parametro γ : compilando la tabella non si identifica nessun comportamento in grado di influenzarlo. Riflettendo sul significato di γ , legato alla durata dell'infezione, è evidente che questo dipenda esclusivamente dalla "natura" della malattia e dalla risposta immunitaria delle persone. Solo l'intervento con farmaci efficaci a contrastare l'avanzamento della malattia potrebbe contribuire ad abbassare D .

Riflessione sull'importanza del concetto "appiattare la curva"

Grazie alle simulazioni dell'esercitazione 5, gli studenti hanno compreso il legame tra l'andamento de-

gli infetti e i parametri del modello *SIR*, ma *perché è così importante "appiattare la curva" ("flatten the curve") e che cosa significa?* Prima di poter arrestare la diffusione del contagio è necessario rallentare i contagi attraverso le misure di prevenzione; questo permette agli ospedali (e al sistema sanitario in generale) di avere la possibilità di gestire le risorse (personale, posti letto, attrezzature mediche) in modo da garantire le migliori cure possibili agli infetti. Appiattare la curva significa rallentare i contagi (ridurre il valore della derivata dI/dt) e di "spalmarli" in un arco di tempo più lungo garantendo a chi contrae forme più serie della malattia di poter ricevere cure tempestive e adeguate. Per discutere questo punto è utile utilizzare le illustrazioni di Siouxsie e Morris [13] riportate in figura 6.

Conclusioni

Nell'ambito dell'insegnamento dell'educazione civica proponiamo un percorso didattico multidisciplinare con il duplice scopo di consolidare conoscenze e competenze disciplinari e di raggiungere gli obiettivi trasversali previsti dalle Linee Guida Ministeriali. Il percorso propone una riflessione critica sulla tematica dell'epidemia di COVID-19, attraverso un approccio di didattica laboratoriale ed *inquiry-based learning*. L'idea è quella di introdurre il tema consolidando specifiche preconcoscienze degli studenti legate al proprio ambito disciplinare che serviranno da sostegno per affrontare un argomento

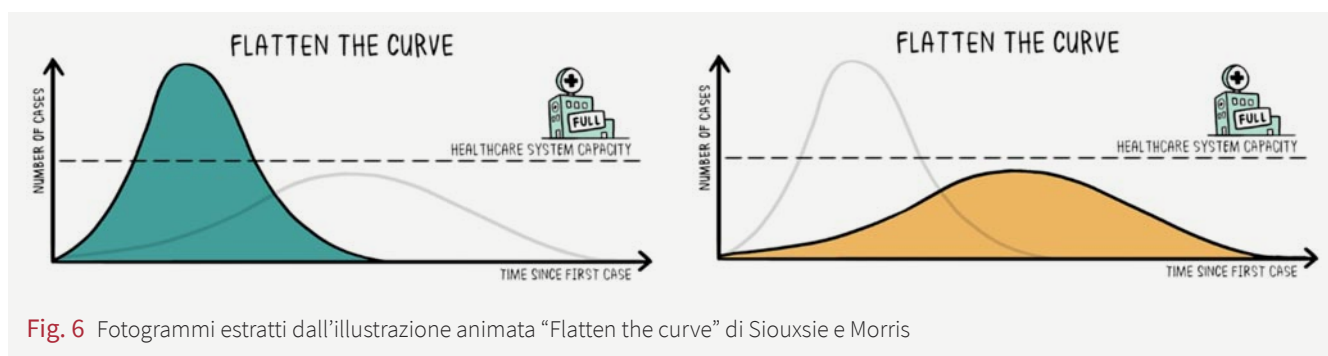


Fig. 6 Fotogrammi estratti dall'illustrazione animata "Flatten the curve" di Siouxsie e Morris

nuovo che esula dal curriculum ordinario. A partire da un approfondimento sulla cinetica di reazione e sulla risoluzione delle equazioni differenziali viene introdotto e discusso il modello epidemiologico *SIR*. Il modello offre una descrizione matematica approssimata dell'evoluzione della pandemia di COVID-19 permettendo agli studenti di capire come un'epidemia si sviluppa, quali sono i metodi per contrastarla e di comprendere il senso delle misure di restrizione per il contrasto alla diffusione del contagio che la popolazione e gli studenti hanno vissuto e stanno vivendo in prima persona, per scongiurare una diffusione esponenziale del contagio, diventando così cittadini consapevoli.

La scelta di affrontare il percorso a partire da argomenti con cui gli studenti hanno più confidenza, legati all'area chimica-matematica, e di trattare un caso di studio complesso fortemente legato all'attualità, contribuisce ad incentivare il livello di partecipazione e di coinvolgimento degli studenti. Le esercitazioni basate sulla simulazione delle equazioni cinetiche e del modello *SIR* attraverso un programma in *Python* per effettuare l'integrazione numerica permette, inoltre, agli studenti di comprendere l'importanza del coding e della programmazione per la risoluzione di problemi complessi in un'ottica *STEM*.

Bibliografia

- [1] S. Jurinovich e M. Pistolesi, *Risorse on-line percorso didattico di educazione civica: Cinetica di reazione e modello SIR*, 2021; <https://padlet.com/sandrojurinovich/dpjlk2kom7419gp> (accessed Apr. 19, 2021).
- [2] M. Pedaste *et al.*, Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle, *Educational Research Review*, vol. 14, pp. 47–61, Feb. 2015; doi: 10.1016/j.edurev.2015.02.003.
- [3] P. J. Keeler, W. Atkins e J. De Paula, *Chimica Fisica*. Zanichelli, Bologna, 2004.
- [4] *Geogebra – Graphing*; <http://www.geogebra.org/graphing> (accessed Apr. 19, 2021).
- [5] *TIOBE Index*, 2021; <https://www.tiobe.com/tiobe-index/> (accessed Apr. 19, 2021).
- [6] A. Nagpal and G. Gabrani, Python for Data Analytics, Scientific and Technical Applications, in *2019 Amity International Conference on Artificial Intelligence (AICAI)*, Feb. 2019, pp. 140–145; doi: 10.1109/AICAI.2019.8701341.
- [7] *Protezione Civile, Opendata*; <https://opendatadpc.maps.arcgis.com/apps/dashboards/b0c68bce2cce478eaac82fe38d4138b1> (accessed Apr. 19, 2021).
- [8] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 115, no. 772, pp. 700–721, Aug. 1927; doi: 10.1098/rspa.1927.0118.
- [9] I. Cooper, A. Mondal, and C. G. Antonopoulos, A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities, *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 139, p. 110057, Oct. 2020; doi: 10.1016/j.chaos.2020.110057.
- [10] G. Giordano *et al.*, Modelling the COVID-19 epidemic and implementation of population-wide interventions in Italy, *Nature Medicine*, vol. 26, no. 6, pp. 855–860, Jun. 2020, doi: 10.1038/s41591-020-0883-7.
- [11] Q. Lin *et al.*, A conceptual model for the coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak in Wuhan, China with individual reaction and governmental action, *International Journal of Infectious Diseases*, vol. 93, pp. 211–216, Apr. 2020, doi: 10.1016/j.ijid.2020.02.058.
- [12] M. Martcheva, *An Introduction to Mathematical Epidemiology*, vol. 61. Boston, MA: Springer US, 2015.
- [13] S. Wiles and T. Morris, Flatten the curve; https://it.wikipedia.org/wiki/Distanziamento_sociale#/media/File:Covid-19-curves-graphic-social-v3.gif (accessed Apr. 19, 2021).